数理解析研究所講究録
901 巻 1995 年 51-57



# 自由位相アーベル群の tightness の計算

静岡大学教育学部　山田　耕三　(Kohzo Yamada)

## 1. はじめに

この報告集では、距離化可能空間 $X$ から生成される free abelian topological group $A(X)$ とその部分空間である $A_n(X)$ の tightness と、sequential fan $S_\kappa$ の有限積の tightness の関係について調べる上での、本質となる計算方法について述べる。

空間はすべて discrete でない Tychonoff 空間と仮定する。そこでまず最初に、よく使われる記号と基本的な事実を紹介する。$A(X)$ を空間 $X$ から生成される Markov の意味での *free abelian topological group* [7] とし、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$A_n(X)$ を、その規約な表現の長さが $n$ 以下になるような $A(X)$ の元（*word* と呼ぶ）からなる集合とする。但し、$A_0(X) = \{0\}$ （0 は $A(X)$ の単位元）としておく。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $i_n$ を $(X \oplus -X \oplus \{0\})^n$ から $A_n(X)$ への自然な写像 i.e. $i_n((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ と定義する。このとき次の重要な事実が知られている。(参考 [1], [6], [9])

**補題 1.1.** 空間 $X$ について次の性質が成り立つ。

(1) $\mathcal{T}_1$ を $X$ を部分空間として含む $A(X)$ の *group topology* とすると、$\mathcal{T}_1$ は、$A(X)$ の *free topology* より弱くなる。

(2) $X$ 及び各 $A_n(X)$ は $A(X)$ の閉部分空間となる。

(3) $A_0 = \{g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_n - y_n : x_i, y_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$ は $A(X)$ の開且つ閉な部分群となる。よって, 0 の近傍となっている。更に、$A(X)$ は $\bigcup\{A_{2n}(X) \setminus A_{2n-1}(X) : n \in \mathbb{N}\}$ と$\bigcup\{A_{2n+1}(X) \setminus A_{2n}(X) : n \in \mathbb{N}\}$ との *disjoint sum* で表される。

(4) 各写像 $i_n$ は連続である。.

(5) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $i_n^{-1}(A_n(X) \setminus A_{n-1}(X))$ での $i_n$ の制限写像は、$n!$-*to*-1 な開且つ閉写像となる。

(6) $Y$ を $X$ の $P$-*embedded* 閉部分空間とすると、$A(Y)$ は $A(X)$ に閉部分群として埋め込まれる。このとき、$Y$ から $X$ への *inclusion map* の、$A(Y)$ 上への連続で準同型な拡張は閉な埋め込みとなる。よって、各 $A_n(Y)$ は $A_n(X)$ へ閉部分空間として、埋め込まれる。

次に、$A(X)$ の単位元の近傍系について述べる。空間 $X$ において、$X$ の universal uniformity を $\mathcal{U}_X$ とすると、次のことが分かる。

**補題 1.2 ([10])** $n \in \mathbb{N}$ を固定する。そこで、任意の $U \in \mathcal{U}_X$ に対して、$V_n(U) = \{x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_k - y_k : (x_i, y_i) \in U, k \leq n\}$ とおくと、$\{V_n(U) : U \in \mathcal{U}_X\}$ は、単位元 0 の $A_{2n}(X)$ における近傍系となる。

ここで、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$X^{2n}$ から $A_{2n}(X)$ への写像 $j_n$ を次のように決める。任意の $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ in $X^n$ に対して

$$j_n(((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n))) = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_n - y_n.$$

すると、$j_n$ は、連続となるが、さらに次のような性質を持っている。

**系 1.3.** 空間 $X$ において、$n \in \mathbb{N}$ と $A_{2n}(X)$ の部分集合 $E$ に対して、$0 \in \overline{E}$ となることの必要十分条件は任意の $U \in \mathcal{U}_X$ に対して $j_n^{-1}(E) \cap U^n \neq \emptyset$ となることである。

上の事実が $A_n(X)$ の tightness を計算する上での一つの重要な道具となる。

## 2. tightness の計算

このセクションでは、$A_n(X)$ の tightness を計算するためのキーとなる補題を証明する。空間 $X$ と $n \in \mathbb{N}$ を固定する。$A_n(X)$ の tightness を計算するために、部分集合 $H$ と word $g$ で、$g \in \overline{H}$ となるものをとる。このとき、$H$ と $g$ の位置関係は一般に次の 3 通りの場合が考えられる。

(1) ある $k \leq n$ があって、$g \in A_k(X) \setminus A_{k-1}(X)$ で、$g \in \overline{H \cap (A_k(X) \setminus A_{k-1}(X))}$ である場合、

(2) $2k \leq n$ となるような $k$ があって、$g = 0$ で $g \in \overline{H \cap (A_{2k}(X) \setminus A_{2k-1}(X))}$ である場合、

(3) $2m + k \leq n$ となる $k$ と $m$ があって、$g \in A_k(X) \setminus A_{k-1}(X)$ で
$g \in \overline{H \cap (A_{2m+k}(X) \setminus A_{2m+k-1}(X))}$ となる場合。

(1) の場合は、補題 1.1 の (5) を適用すればよい。例えば、もし空間 $X$ が距離化可能ならば、ある可算集合 $C$ が $H \cap (A_k(X) \setminus A_{k-1}(X))$ にあって、$g \in \overline{C}$ となることがすぐにわかる。また、(2) の場合は、系 1.3 を適用して、計算することができる。そこで、最も一般的な場合である (3) についての計算方法（キーとなる補題）を次に紹介し、実際に証明をしてみる。

**補題 2.1.** $X$ を第一可算で、$X^2$ の *diagonal* の任意の近傍が $\mathfrak{U}_X$ の元となるような（例えば *paracompact*）空間とする。そこで、$m,n \in \mathbb{N}$, $H \subset A_{2m+n}(X) \setminus A_{2m+n-1}(X)$ そして *word* $g \in A_n(X) \setminus A_{n-1}(X)$ をとり、$g \in \overline{H}$ となっているとする。すると、$H$ の部分集合 $H_0$ で、$g \in \overline{H_0}$ で且つ $|H_0| \le t(A_{2m}(X))$ となるものが存在する。

証明　$t(A_{2m}(X)) = \tau$ とする。いま $g \in A_n(X) \setminus A_{n-1}(X)$ より、$g = a_1 + \cdots + a_k - a_{k+1} - \cdots - a_n$ を規約表現、但し $0 \le k \le n$ で $a_i \in X$ としておく。そこで、$H_1 = H - g$ とすると、$0 \in \overline{H_1}$ となる。ここで、補題 1.1 の (3) より、$H_0 \subset A_0$ と仮定しておける。よって、$H_1$ は、次のように表現される。

$$\begin{aligned}H_1 = \{\boldsymbol{h}_\lambda = x_1^\lambda - y_1^\lambda + \cdots + x_m^\lambda - y_m^\lambda + a_1 - y_{m+1}^\lambda + \cdots + a_k - y_{m+k}^\lambda \\ + x_{m+k+1}^\lambda - a_{k+1} + \cdots + x_{m+n}^\lambda - a_n : \text{ each } x_i^\lambda, y_i^\lambda \in X, \lambda \in \Lambda\}.\end{aligned}$$

すると、系 1.3 より、

$$j_{m+n}^{-1}(H_1) \cap U^{m+n} \ne \emptyset \ \text{ for each } U \in \mathfrak{U}_X \tag{1}$$

となる。そこで、$P$ を、集合 $\{1,2,\ldots,m+n\}$ 上の置換群とし、任意の $\pi \in P$ に対して $E_\pi = \{\boldsymbol{x} = ((x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m+n)}), (y_{\pi(1)}, y_{\pi(2)}, \ldots, y_{\pi(n+m)})) \in X^{2(m+n)} : j_{m+n}(\boldsymbol{x}) \in H_1\}$ とおくと、$j_{m+n}^{-1}(H_1) = \bigcup_{\pi \in P} E_\pi$ となる。ところがこのとき $P$ は有限集合で、$\mathfrak{U}_X$ の有限個の元の共通集合はまた、$\mathfrak{U}_X$ に属するので、

$$E \cap U^{m+n} \ne \emptyset \ \text{ for each } U \in \mathfrak{U}_X, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\text{但し、}E = \{\boldsymbol{e}_\lambda = ((x_1^\lambda, \ldots, x_m^\lambda, a_1, \ldots, a_k, x_{m+k+1}^\lambda, \ldots, x_{m+n}^\lambda), \\ (y_1^\lambda, \ldots, y_m^\lambda, y_{m+1}^\lambda, \ldots, y_{m+k}^\lambda, a_{k+1}, \ldots, a_n)) \in X^{2(m+n)} : \lambda \in \Lambda\}.\end{aligned}$$

としておける。そこで、

$$\begin{aligned}B &= \{\boldsymbol{b}_\lambda = ((x_1^\lambda, \ldots, x_m^\lambda), (y_1^\lambda, \ldots, y_m^\lambda)) \in X^{2m} : \lambda \in \Lambda\}, \\ C &= \{\boldsymbol{c}_\lambda = ((a_1, \ldots, a_k, x_{m+k+1}^\lambda, \ldots, x_{m+n}^\lambda), \\ &\qquad (y_{m+1}^\lambda, \ldots, y_{m+k}^\lambda, a_{k+1}, \ldots, a_n)) \in X^{2n} : \lambda \in \Lambda\}.\end{aligned}$$

とおくと、(2) より

$$B \cap U^m \ne \emptyset \ \text{ for each } U \in \mathfrak{U}_X \text{ and} \tag{3}$$

$$C \cap U^n \ne \emptyset \ \text{ for each } U \in \mathfrak{U}_X. \tag{4}$$

となる。そこで空間 $X$ の仮定と (4) より、各 $i = 1, \ldots, k$ に対して $a_i \in \overline{\{y_{m+i}^\lambda : \lambda \in \Lambda\}}$ となり、また各 $j = k+1, \ldots, n$ に対しては $a_j \in \overline{\{x_{m+j}^\lambda : \lambda \in \Lambda\}}$ となる。故に、$D =$

$\{\boldsymbol{d}_\lambda = (y^\lambda_{m+1}, \ldots, y^\lambda_{m+k}, x^\lambda_{m+k+1}, \ldots, x^\lambda_{m+n}) : \lambda \in \Lambda\}$ とおくと $(a_1, \ldots, a_n) \in \overline{D}$ となることがわかる。

さて一方、空間 $X^n$ は第 1 可算公理を満たすので、$\{V_s : s \in \mathbb{N}\}$ を $(a_1, \ldots, a_n)$ の $X^n$ における可算近傍系とする。但し、$V_1 = X^n$ で $V_{s+1} \subset V_s$ としておく。そこで、各 $s \in \mathbb{N}$ に対して $\Lambda_s = \{\lambda \in \Lambda : \boldsymbol{d}_\lambda \in V_s \setminus V_{s+1}\}$, $B_s = \{\boldsymbol{b}_\lambda : \lambda \in \Lambda_s\}$, $C_s = \{\boldsymbol{c}_\lambda : \lambda \in \Lambda_s\}$ そして $D_s = \{\boldsymbol{d}_\lambda : \lambda \in \Lambda_s\}$ とおき、次の 2 つの場合に分けて考える。

*Case* 1: $\mathbb{N}$ のある部分列 $\{t_s : s \in \mathbb{N}\}$ があって、任意の $s \in \mathbb{N}$ と $U \in \mathfrak{U}_X$ に対して $B_{t_s} \cap U^m \neq \emptyset$ となる場合

この場合は、系 1.3 より任意の $s \in \mathbb{N}$ に対して $0 \in \overline{j_m(B_{t_s})}$ となるので、$\Lambda_{t_s}$ のある部分集合 $\Lambda'_s$ が存在して、$0 \in \overline{\{j_m(\boldsymbol{b}_\lambda) : \lambda \in \Lambda'_s\}}$ 且つ $|\Lambda'_{t_s}| \leq \tau$ となる。そこで、各 $\lambda \in \bigcup_{s=1}^\infty \Lambda'_s$ に対して

$$\begin{aligned} E_\lambda = \{((&x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_k, x^\lambda_{m+k+1}, \ldots, x^\lambda_{m+n}), \\ &(y_1, \ldots, y_m, y^\lambda_{m+1}, \ldots, y^\lambda_{m+k}, a_{k+1}, \ldots, a_n)) \in X^{2(m+n)} : \\ &((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) \in j_m^{-1} j_m(\boldsymbol{b}_\lambda)\} \end{aligned}$$

とし、$E_1 = \bigcup\{E_\lambda : \lambda \in \bigcup_{s=1}^\infty \Lambda'_s\}$ とおくと、$|E_1| \leq \omega \cdot \tau = \tau$ となり任意の $U \in \mathfrak{U}_X$ に対して、$E_1 \cap U^{m+n} \neq \emptyset$ となることがわかる。そこで、$H_2 = j_{m+n}(E_1)$ とすると $H_2 \subset H_1$ であり、$0 \in \overline{H_2}$ 且つ $|H_2| \leq \tau$ となる。よって、$H_0 = H_2 - g$ とおくとこれが求めるものとなる。

*Case* 2: ある $s_0 \in \mathbb{N}$ があって、任意の $s \geq s_0$ と $U \in \mathfrak{U}_X$ に対して $B_s \cap U^m = \emptyset$ となる場合

$B_1 = \bigcup_{s \geq s_0} B_s$ とおき、いまある $U_1 \in \mathfrak{U}_X$ があって $B_1 \cap U_1^m = \emptyset$ となったと仮定すると、

$$\bigcup_{s \geq s_0} E_s \cap U_1^{m+n} = \emptyset. \tag{5}$$

となることがわかる。一方、$\bigcup_{s<s_0} D_s \cap V_s = \emptyset$ なので$\bigcup_{s<s_0} C_s \cap U_2^n = \emptyset$ となる $U_2 \in \mathfrak{U}_X$ が存在する。よって、

$$\bigcup_{s<s_0} E_s \cap U_2^{m+n} = \emptyset. \tag{6}$$

となるが、(5) と (6) をあわせると $E \cap (U_1 \cap U_2)^{m+n} = \emptyset$ となり、これは (2) に矛盾する。結局、任意の $U \in \mathfrak{U}_X$ に対して $B_1 \cap U^m \neq \emptyset$ となることが示された。よって、系 1.3 より $0 \in \overline{j_m(B_1)}$ となり、このことより $0 \in \overline{\{j_m(\boldsymbol{b}_\lambda) : \lambda \in \Lambda_1\}}$ 且つ $|\Lambda_1| \leq \tau$ となるような $\Lambda_1 \subset \bigcup_{s \geq s_0} \Lambda_s$ をとることができる。さてここで、Case 2 の仮定より任意の $s \geq s_0$ に対して $0 \notin \overline{\{j_m(\boldsymbol{b}_\lambda) : \lambda \in \Lambda_s\}}$ となっていることより $\Lambda_1 \cap \bigcup_{t \geq s} \Lambda_t \neq \emptyset$ となることがわか

るが、このことは $(a_1, \ldots, a_n) \in \overline{\{\boldsymbol{d}_\lambda : \lambda \in \Lambda_1\}}$ となることを意味している。そこで、任意の $\lambda \in \Lambda_1$ に対して、

$$\begin{aligned} E_\lambda = \{((&x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_k, x^\lambda_{m+k+1}, \ldots, x^\lambda_{m+n}), \\ &(y_1, \ldots, y_m, y^\lambda_{m+1}, \ldots, y^\lambda_{m+k}, a_{k+1}, \ldots, a_n)) \in X^{2(m+n)} : \\ &((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) \in j_m^{-1} j_m(\boldsymbol{b}_\lambda)\} \end{aligned}$$

とおき、$E_1 = \bigcup\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda_1\}$ とすると、任意の $U \in \mathfrak{U}_X$ に対して $E_1 \cap U^{m+n} \neq \emptyset$ となる。そこで、最後に $H_2 = j_{m+n}(E_1)$ とし、更に $H_0 = H_2 + g$ とおくとこの $H_0$ が求めるものとなる。 □

## 3. 結果

これまでの補題等を利用することによりまず次のことがわかる。いま $\kappa$ を無限濃度とし、任意の $\alpha < \kappa$ に対して $C_\alpha$ を収束点列とその収束先をあわせたものとする。そこで、$C_\kappa = \bigoplus_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ とする。すると、sequential fan $S_\kappa$ は $C_\kappa$ からの自然な商写像による像となる。すると、次のことがわかる。

**定理 3.1.** $\kappa$ を無限濃度としたとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $t(A_{2n}(C(\kappa))) = t(S(\kappa)^n)$ となる。

さて、Arhangel'skiĭ, Okunev そして Pestov は [2] の論文の中で距離化可能空間 $X$ に対して $t(A(X)) \leq w(X')$ （$X'$ は $X$ の孤立点でない元をすべて集めた集合を表す。）となることを示したが、この事実を適応すると次のことがわかる。

**系 3.2.** 距離化可能空間 $X$ において、$w(X') = \kappa$、但し $cf(\kappa) > \omega$ とし、$n \in \mathbb{N}$ とする。このとき $t(S(\kappa)^n) = t(A_{2n}(C(\kappa))) \leq t(A_{2n}(X)) \leq t(A(X)) \leq w(X') = \kappa$ となる。

実際この系より、[2] の論文で出された疑問に関する次のような部分解が得られる。

**系 3.3.** 距離化可能空間 $X$ において、$w(X') = \kappa$、但し $cf(\kappa) > \omega$ とする。いまある $n \in \mathbb{N}$ があって $t(S(\kappa)^n) = \kappa$ となったとすると、$t(A_{2n}(X)) = t(A(X)) = w(X') = \kappa$ となる。

しかしながら $S(\kappa)^n$ の tightness の計算は大変難しくあまり多くのことは今だわかっていない（参考：[3]）。ただ、$\kappa = \omega_1$ の時は、[5] で $t(S(\omega_1)^2) = \omega_1$ となることがわかっているので次の事実が得られる。

**系 3.4.** 距離化可能空間 $X$ において、$w(X') = \omega_1$ とすると、$t(A_4(X)) = t(A(X)) = w(X') = \omega_1$ となる。

最後に、$\kappa = \omega$ の時に関する結果を紹介しておく。

**定理 3.5.** 空間 $X$ を距離化可能空間とする。

1 次の事柄は同値である。

(a) $A(X)$ の *tightness* は可算、

(b) $A_4(X)$ の *tightness* は可算、

(b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n(X)$ の *tightness* は可算、

(c) $X'$ は 第2可算公理を満たす。

2 $A_3(X)$ は常に可算となる。

## 参考文献


[1] A. V. Arhangel'skiĭ, Mapping related to topological groups, Soviet Math. Dokl. 9 (1968) 1011-1015.

[2] A. V. Arhangel'skiĭ, O. G. Okunev and V. G. Pestov, Free topological groups over metrizable spaces, Topology Appl. 33 (1989) 63-76.

[3] K. Eda, G. Gruenhage, P. Koszmider, K. Tamano and S. Todorčević, Sequential fans in topology, Preprint.

[4] M. I. Graev, Free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 12(3) (1948) 279-324 (in Russian); English transl.: Amer. Math. Soc. transl. 35 (1951); Reprint: Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962) 305-364.

[5] G. Gruenhage and Y. Tanaka, Products of $k$-spaces and spaces of countable tightness, Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), 299-308.

[6] C. Joiner, Free topological groups and dimension, Trans. Amer. Math. Soc. 220 (1976) 401-418.

[7] A. A. Markov, On free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 9 (1945) 3-64 (in Russian); English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. 30 (1950) 11-88; Reprint: Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962) 195-272.

[8] V. G. Pestov, On neighbourhoods of unity in free topological groups, Vestnik Moscov. Univ. Ser. 1 Mat. Mech. 3 (1985) 8-10 (in Russian).

[9] M. G. Tkačecko, Completeness of free abelian topological groups, Soviet Math. Dokl. 27 (1983) 341-345.

[10] K. Yamada, Characterizations of a metrizable space $X$ such that every $A_n(X)$ is a $k$-space, Topology Appl. 49 (1993) 75-94.

[11] K. Yamada, Tightness of free abelian topological groups and of finite products of sequential fans, Preprint.